# Séquence 10

# Convexité

## I. Dérivée seconde

Définition :
Soit une fonction $f$ dérivable sur un intervalle I dont la dérivée $f'$ est dérivable sur I.
On appelle **fonction dérivée seconde** de $f$ sur I la dérivée de $f'$ et on note :
$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Exemple :
Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$.
Calculer $f''(x)$

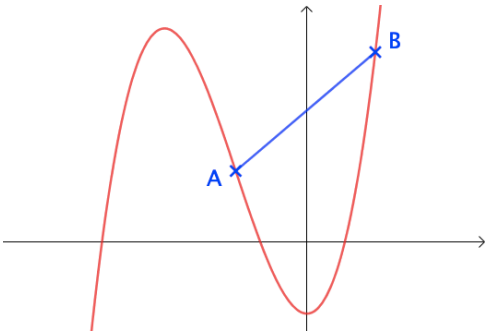
## II. Fonction convexe et fonction concave

Activité 4 p. 201 : découvrir le lien entre la convexité d'une fonction $f$ , les variations de sa dérivée et la position relative de la courbe avec ses tangentes.

### A. Reconnaitre graphiquement la convexité d'une fonction

1) Définitions avec les cordes

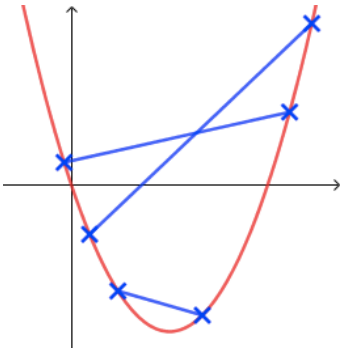
Définition : Une **corde** est un segment reliant deux points d'une courbe.

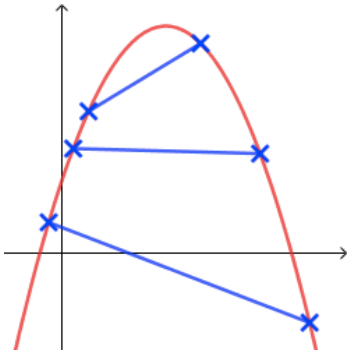



Définitions : Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle I.

- La fonction $f$ est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.

- La fonction $f$ est **concave** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.

Fonction convexe 

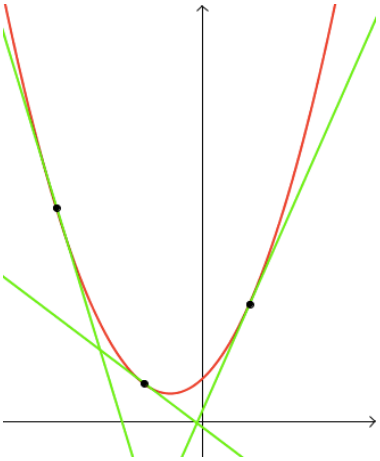
Fonction concave 

2) Définitions avec les tangentes

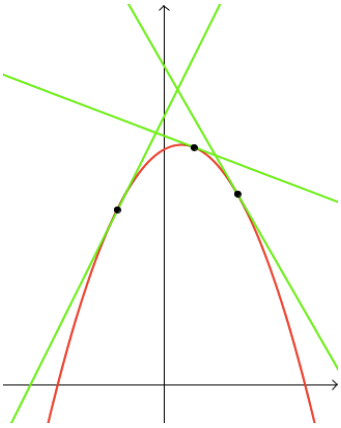
Définitions :

Soit une fonction $f$ dérivable sur un intervalle I.

- La fonction $f$ est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- La fonction $f$ est **concave** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Fonction convexe



Fonction concave

Méthode : déterminer graphiquement la convexité d'une fonction

Capacité 5 p. 207 et exercices

## B. Convexité des fonctions deux fois dérivables

**Propriété :**

Soit une fonction $f$ définie et dérivable sur un intervalle I.

- La fonction $f$ est convexe sur I, si sa dérivée $f'$ est croissante sur I, soit
$$f''(x) \geq 0, \text{ pour tout } x \text{ de I.}$$
- La fonction $f$ est concave sur I, si sa dérivée $f'$ est décroissante sur I, soit
$$f''(x) \leq 0, \text{ pour tout } x \text{ de I.}$$

**Démonstration au programme :**

**Propriétés(admis):**

- La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cube $x \longmapsto x^3$ est concave sur $]-\infty\,;\,0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.
- La fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty\,;\,0[$ et convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.
- La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0\,;\,+\infty[$.

**Méthode : Étudier la convexité d'une fonction**

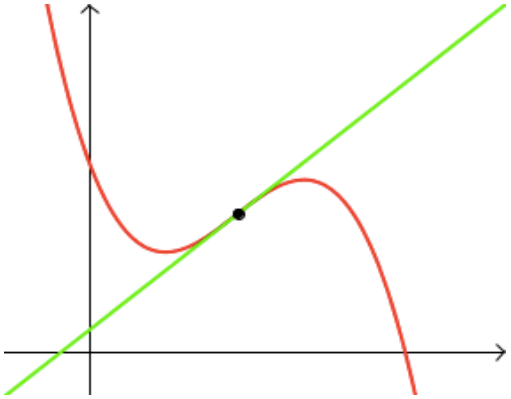
Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

Étudier la convexité de la fonction $f$.

Exercices d'application : capacité 6 p. 207 et exercices

## III. Point d'inflexion

Définition :
Soit une fonction $f$ dérivable sur un intervalle I.
Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.

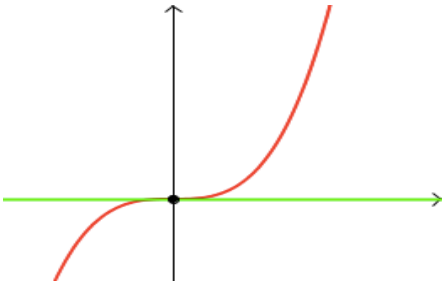


Remarque importante :
Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Exemple :
On considère la fonction cube $x \longmapsto x^3$.
La tangente au point O(0,0) est l'axe des abscisses.

Pour $x \leq 0$, la courbe est en dessous de sa tangente.
Pour $x \geq 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente.

La tangente à la courbe en O traverse donc la courbe.
Le point O est un point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.



Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème
Capacité 8 p. 209 et exercices

Méthode : Prouver une inégalité en utilisant la convexité d'une fonction
Capacité 7 p. 208 et exercices