Séquence 13

Produit scalaire dans l'espace

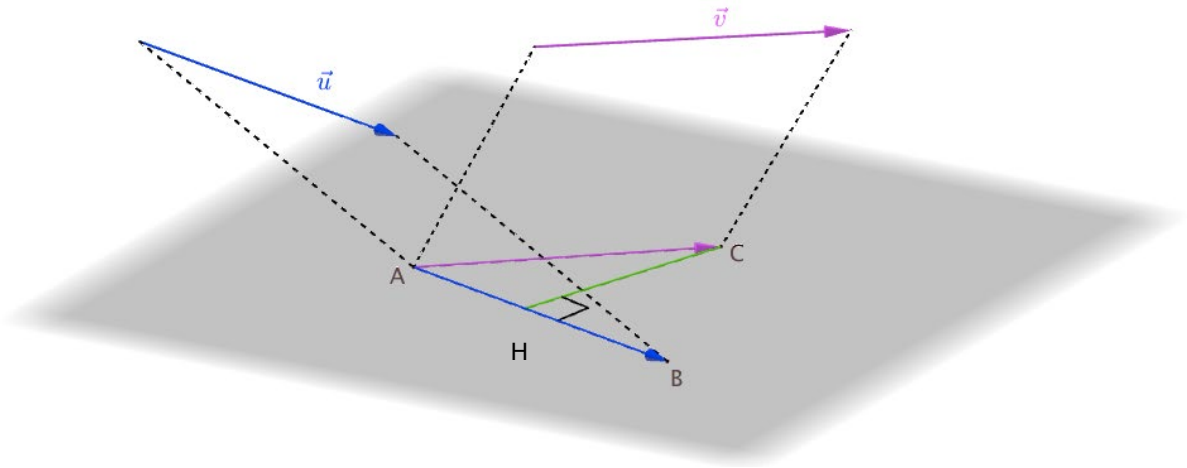
I. Produit scalaire de deux vecteurs

A. Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe un plan P contenant les points A, B et C.

Définition :

On appelle **produit scalaire de l'espace** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit $\vec{u}.\vec{v}$ égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan P.



On a ainsi :

- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est un vecteur nul,

- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$

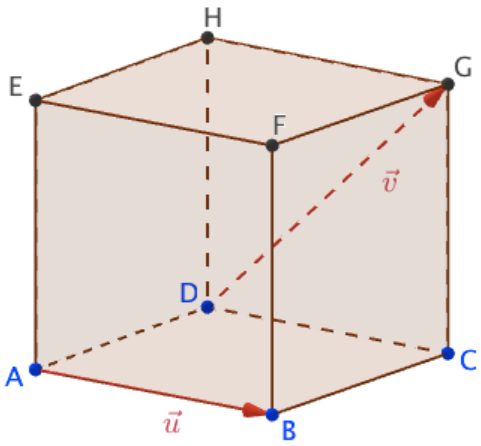
Exemple :

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$

$= AB \times AB = a^2$



B. Propriétés

Les propriétés dans le plan sont conservées dans l'espace.

Propriétés :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

- $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- Symétrie : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- Bilinéarité : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $(\vec{v}+\vec{w}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{u}$

  $(k\,\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\,\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v}), k \in \mathbb{R}$
- Orthogonalité : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux (ou $\vec{u} = 0$ et $\vec{v} = 0$)

Démonstration :

Il existe un plan P tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admettent des représentants dans P.

Dans le plan, les règles de géométrie plane sur les produits scalaires s'appliquent.

C. Identités remarquables

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, on a :

1) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

2) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

D. Formules de polarisation

Propriété :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, on a :

1) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

2) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

3) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

Exercices d'application : capacité 1 et 2 p. 89 et exercices

II. Produit scalaire dans un repère orthonormé

A. Base et repère orthonormé

Définition :

Une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormée** si :

- les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux,
- les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont unitaires, soit : $\|\vec{\imath}\| = 1$, $\|\vec{\jmath}\| = 1$ et $\|\vec{k}\| = 1$.

Définition :

Un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormé,** si sa base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormée**.**

B. Expression analytique du produit scalaire

Propriété :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Et en particulier : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Démonstration :

$$\vec{u}.\vec{v} = (x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}).(x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k})$$

$$= xx'\vec{\imath}.\vec{\imath} + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + xz'\vec{\imath}.\vec{k} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}.\vec{\jmath} + yz'\vec{\jmath}.\vec{k} + zx'\vec{k}.\vec{\imath} + xy'\vec{k}.\vec{\jmath} + zz'\vec{k}.\vec{k}$$

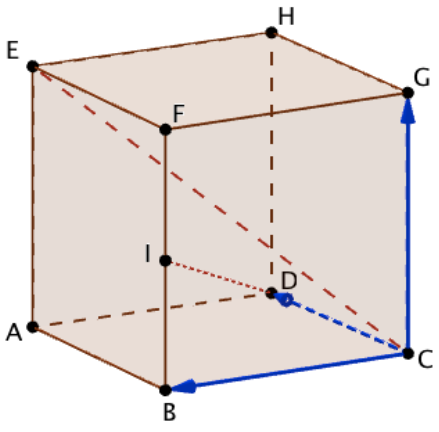
$$= xx' + yy' + zz'$$

En effet, on a par exemple dans le plan définit par le couple $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$:

$\vec{\imath}.\vec{\imath} = \|\vec{\imath}\|^2 = 1$, $\vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \|\vec{\jmath}\|^2 = 1$ et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$

On a en particulier : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u} = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2$.

Exemple :



On considère le repère de l'espace $(C\,;\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CG})$.

Alors : $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}1-0\\0-1\\0{,}5-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}1\\-1\\0{,}5\end{pmatrix}$.

Alors : $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{DI} = 1\times 1 + 1\times(-1) + 1\times 0{,}5 = 0{,}5$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ ne sont pas orthogonaux.

C. Conséquence : Expression de la distance entre deux points

Propriété :

Soit $A(x_A, y_A, z_A,)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace. On a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

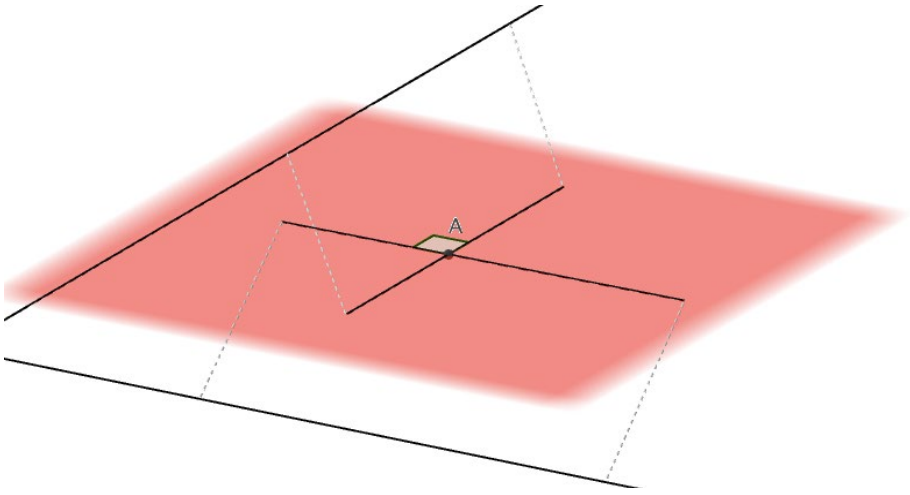
Exercices d'application : capacité 3 et 4 p. 91 et exercices

III. Orthogonalité

A. Orthogonalité de deux droites

Définition :

Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.

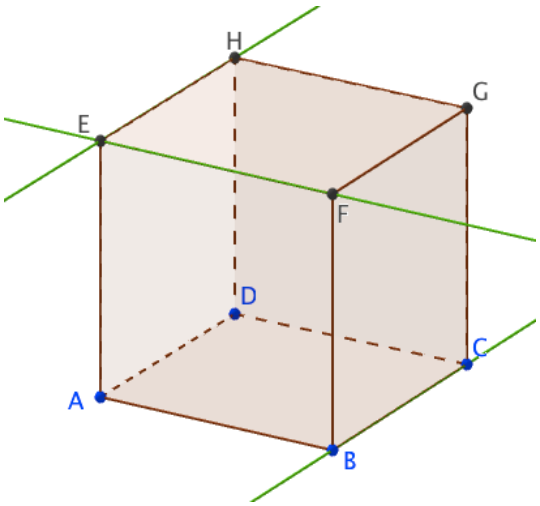


Exemple :

ABCDEFGH est un cube.

- Les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires.

- Les droites (BC) et (EF) sont orthogonales.



Remarques :

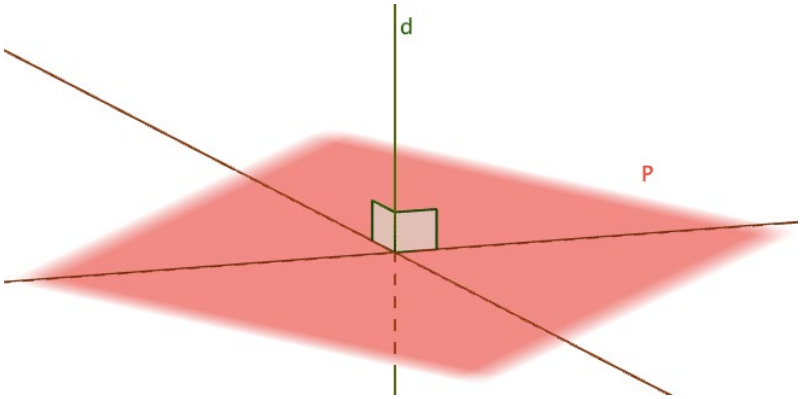
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.

- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.

B. Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Propriété :

Une droite d est orthogonale à un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de P.



Propriété :

Si une droite d est orthogonale à un plan P alors elle est orthogonale à toutes les droites de P.

Démonstration :

Soit une droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de P. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs respectifs de d_1 et d_2.

Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et orthogonaux au vecteur $\vec{n}$.

Soit une droite quelconque Δ de P de vecteur directeur $\vec{w}$.

Démontrons que Δ est orthogonale à d.

$\vec{w}$ peut se décomposer en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui constituent une base de P (car non colinéaires).

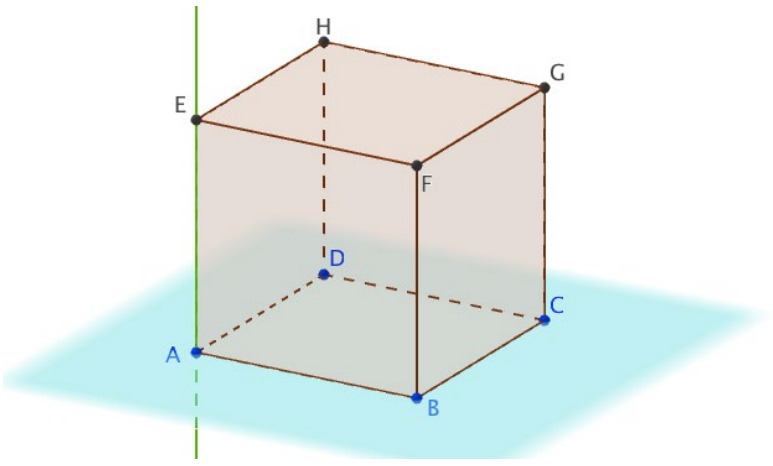
Il existe donc deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Donc $\vec{w}.\vec{n} = x\vec{u}.\vec{n} + y\vec{v}.\vec{n} = 0$, car $\vec{n}$ est orthogonal avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Donc $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\vec{w}$.

Et donc d est orthogonale à Δ.

Exemple :



ABCDEFGH est un cube.

(AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB).

(AB) et (AD) sont sécantes et définissent le plan (ABC).

Donc (AE) est orthogonal au plan (ABC).

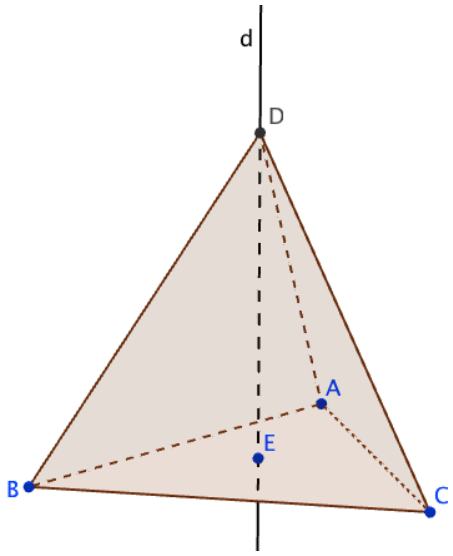
Méthode : Démontrer que des droites sont orthogonales

ABC est un triangle équilatéral. E est le point d'intersection de ses médianes.

La droite d passant par E est orthogonale au plan (ABC).

La pyramide ABCD est telle que D soit un point de la droite d.

Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.



La droite d est orthogonale au plan (ABC).

Comme la droite (AC) appartient au plan (ABC), la droite (AC) est orthogonale à la droite d.

Par ailleurs, la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BE) car dans un triangle équilatéral, les médianes et les hauteurs sont confondues.

Ainsi, (AC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BED) : (BE) et d.

Donc (AC) est orthogonale au plan (BED).

La droite (BD) appartient au plan (BED) donc la droite (AC) est orthogonale à la droite (BD).

Méthode : Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité

Soit un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arêtes de longueur l.

Démontrer que les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales.

On va prouver que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$
$$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$$
$$= -\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$$

Dans le triangle équilatéral ABD, on a :

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = AD \times AB \times cos\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)$$
$$= l \times l \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{l^2}{2}$$

On démontre de même dans le triangle équilatéral ADC que :

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \frac{l^2}{2}$$

Ainsi : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = -\frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2} = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc orthogonaux.

Les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales

Remarque : Dans un tétraèdre régulier, deux arêtes quelconques opposés sont orthogonales.

Exercices d'application : capacité 5 et 6 p. 93

IV. Vecteur normal à un plan

A. Définition et propriétés

Définition :

Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est **normal** à un plan P lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans P.

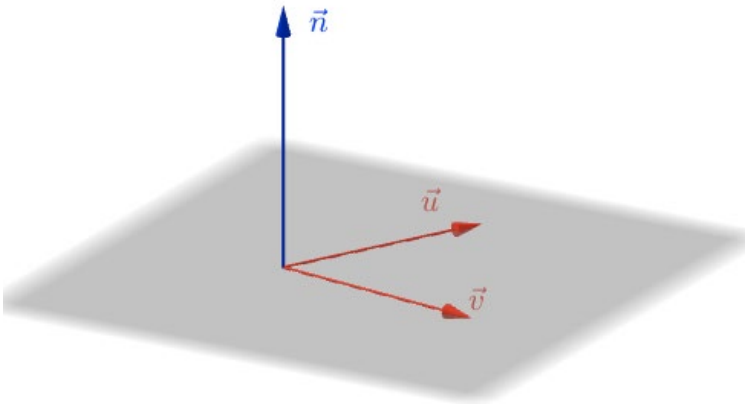
Propriété :

- Soit un point A et un vecteur $\vec{n}$ non nul de l'espace.

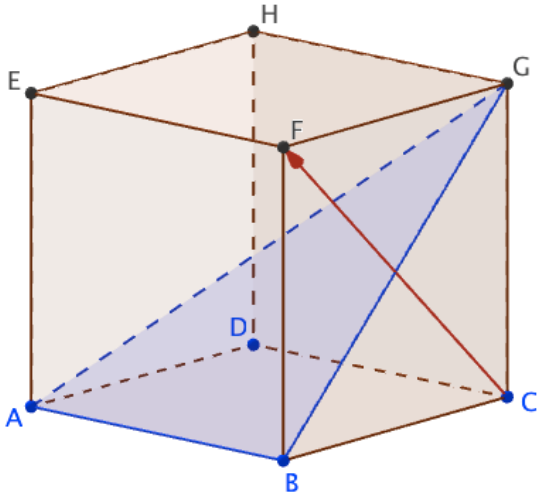
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est un plan de l'espace.

- Réciproquement, soit P un plan de l'espace. Pour tout point A de P et tout vecteur normal $\vec{n}$ de P, P est l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

Théorème : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan P, s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P.



Méthode : Déterminer si un vecteur est normal à un plan



$ABCDEFGH$ est un cube.

Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG).

On considère le repère $\left(B\ ;\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right)$.

Dans ce repère : $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a ainsi :

$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, donc :

$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{BG} = 0\times 0 - 1\times 1 + 1\times 1 = 0$

$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB} = 0\times(-1) - 1\times 0 + 1\times 0 = 0$

Donc $\overrightarrow{CF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABG), il est donc normal à (ABG).

Méthode : Déterminer un vecteur normal à un plan

Dans un repère orthonormé, soit $A\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$.

Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Soit un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ orthogonal au plan (ABC). Il est tel que :

$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ soit $\begin{cases}-2a+b+3c=0\\a-2b=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2\times 2b+b+3c=0\\a=2b\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-3b+3c=0\\a=2b\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}c=b\\a=2b\end{cases}$

Prenons par exemple, $b=1$ (arbitrairement choisi) alors $c=1$ et $a=2$.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est donc normal au plan (ABC).

Remarque : La solution n'est pas unique. Tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est solution.

Exercices d'application : capacité 7 p. 93

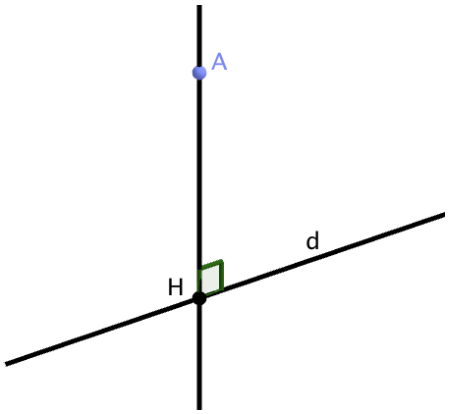
V. Projection orthogonale

A. Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition :

Soit un point A et une droite d de l'espace.

La projection orthogonale de A sur d est le point H appartenant à d tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite d.

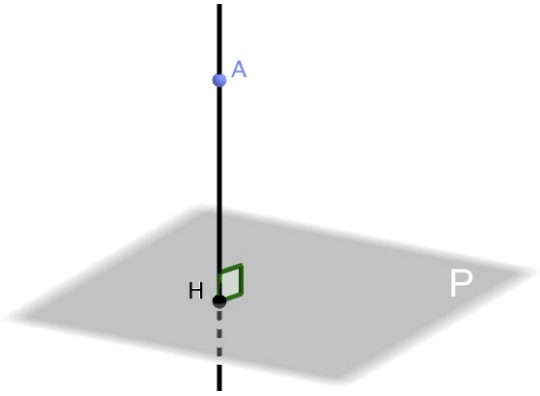


B. Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition :

Soit un point A et un plan P de l'espace.

La projection orthogonale de A sur P est le point H appartenant à P tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan P.



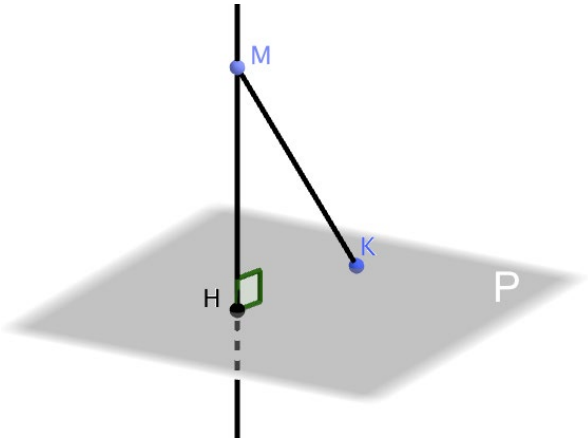
Propriété : Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point de P le plus proche de M.

Démonstration au programme :

Soit H le projeté orthogonal du point M sur le plan P.

Supposons qu'il existe un point K du plan P plus proche de M que l'est le point H.

$KM \leq HM$ car K est le point de la droite le plus proche de M.



Donc $KM^2 \leq HM^2$.

Or, (MH) est orthogonale à P, donc (MH) est orthogonale à toute droite de P.

En particulier, (MH) est perpendiculaire à (HK).

Le triangle MHK est donc rectangle en H.

D'après l'égalité de Pythagore, on a : $HM^2 + HK^2 = KM^2$

Donc $HM^2 + HK^2 \leq HM^2$.

Donc $HK^2 \leq 0$. Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H.

On en déduit que H est le point du plan le plus proche du point M.

Méthode : Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à un plan

On considère un cube $ABCDEFGH$.

Calculer la distance du point G au plan BDE.

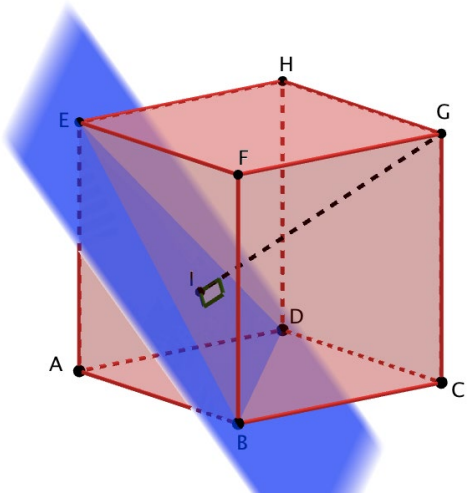
Soit I le projeté orthogonal du point G sur le plan BDE.

La distance du point G au plan BDE est égale à la longueur GI.

On considère le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On cherche à déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du point I. Dans ce repère, on a :

$B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



On a alors : $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$

Or, (GI) est orthogonale au plan BDE donc le vecteur $\overrightarrow{GI}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EB}$. Soit :

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{GI} = 0$

$-1 \times (x-1) + 1 \times (y-1) + 0 \times (z-1) = 0$

$-x + 1 + y - 1 = 0$

$x = y$

$\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{GI} = 0$

$1 \times (x-1) + 0 \times (y-1) + (-1) \times (z-1) = 0$

$x - 1 - z + 1 = 0$

$x = z$

On a ainsi : $x = y = z$

De plus, $\overrightarrow{GI}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BI}$, soit :

$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{GI} = 0$

$(x-1)^2 + y(y-1) + z(z-1) = 0$

$(x-1)^2 + x(x-1) + x(x-1) = 0$ car $x = y = z$

$(x-1)(x-1+x+x) = 0$

$(x-1)(3x-1) = 0$

Donc $3x - 1 = 0$ car $x - 1 \neq 0$ sinon I et G sont confondus, ce qui est impossible.

Soit : $x = \frac{1}{3}$

On en déduit les coordonnées de I : $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

Et ainsi :

$$IG = \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}155$$

Exercices d'application capacité 8 p. 95