# Séquence 11

# Variables aléatoires – Partie 2

## I. Opérations sur les variables aléatoires

### A. Somme de variables aléatoires

Activité 1 et 2 p. 400 : découvrir la somme de deux variables aléatoires

Définition : Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires. La **loi de probabilité** de la variable aléatoire somme $X + Y$ est donnée par :

$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P((X = i) \cap (Y = j))$$

Si, de plus, les évènements $X$ et $Y$ sont indépendants, alors on a :

$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i)\, P(Y = j)$$

Remarque : Le symbole Σ

Si par exemple, $i$ et $j$ sont des entiers naturels et $k = 2$ alors :

$$P(X + Y = 2) = \sum_{i+j=2} P((X = i) \cap (Y = j))$$
$$= P((X = 0) \cap (Y = 2)) + P((X = 1) \cap (Y = 1)) + P((X = 2) \cap (Y = 0))$$

Exercices d'application : capacité 1 p. 403 et exercices

### B. Espérance et variance de combinaisons linéaires de variables aléatoires

#### 1) Linéarité de l'espérance

Propriétés :

1) $E(aX + b) = aE(X) + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
2) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

#### 2) Variance

Propriété :

1) $V(aX + b) = a^2V(X)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
2) Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Exercices d'application : capacité 2 p. 403 et exercices

## II. Echantillon d'une loi de probabilité

### A. Échantillon de taille n d'une loi de probabilité

Activité 3 p. 401 : découvrir la variable aléatoire moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire

Définition :

- Un **échantillon de taille $n$ d'une loi de probabilité** est une liste de $n$ variables aléatoires indépendantes suivant cette loi.
- La **variable aléatoire somme** d'un échantillon de taille $n$ de la loi de X est la variable aléatoire définie définie sur l'ensemble des échantillons de taille $n$ par $Sn = X_1 + X_2 + \cdots, +Xn$
- La variable aléatoire moyenne est la variable aléatoire définie par $Mn = \frac{1}{n}Sn$

Propriétés : Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille $n$ de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi. On pose : $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, alors on a :
1) $E(S) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$
2) $V(S) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$

Exercices d'application : capacité 4 p. 405 et exercices

### B. Échantillon de la loi de Bernoulli

Propriété : Soit $(X_1, X_2, \dots X_n)$ un échantillon de taille $n$ de la loi de Bernoulli de paramètre $p$.
La variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

Exemple :
On étudie la fiabilité d'un composant électronique. On appelle $X$ la variable aléatoire égale à 1 si le composant électronique ne se détériore pas suite aux tests effectués et 0 dans le cas contraire.
Le fabricant précise que le composant électronique ne subit pas de détériorations suite aux tests dans 99,8 % des cas.
Dans ce cas, la variable aléatoire $X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,998.
On effectue les tests sur un échantillon de 100 composants électroniques prélevés au hasard dans le stock du fabricant.
On peut considérer alors que la liste $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_{100})$ forment un échantillon de taille 100 de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,998.
La variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}998$.

## C. Espérance, variance et écart type de la loi binomiale

Propriété : Soit $S$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

$E(S) = np$ $\quad V(S) = np(1-p)$ $\quad \sigma(S) = \sqrt{V(S)}$

Démonstration au programme :

Méthode : Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type pour une loi binomiale

On lance 5 fois de suite un dé à six faces.
On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6.
On considère la variable aléatoire $S$ donnant le nombre de succès.
Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$.

# Tuto calculatrice NUMWORKS pour la loi binomiale