Séquence 7

Vecteurs, droites et plan dans l'espace

I. Vecteurs de l'espace

Activité 1 p. 48 : étendre à l'espace les propriétés des vecteurs du plan

A. Notion de vecteur dans l'espace

Définition : Un **vecteur de l'espace** est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Remarque :
Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité, …

B. Translation

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. On appelle **translation** de vecteur $\vec{u}$ la transformation qui au point M associe le point M', tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Remarque :
Les translations gardent les mêmes propriétés qu'en géométrie plane : conservation du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu, …

C. Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace

Définition : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Tout vecteur de la forme $\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \gamma\,\vec{w}$, avec α, β et γ réels, est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

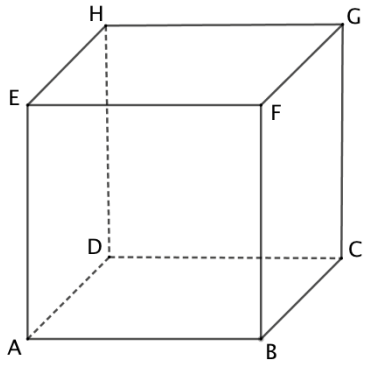
Méthode : Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés

A l'aide du cube ci-contre, représenter les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ donnés par :

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$

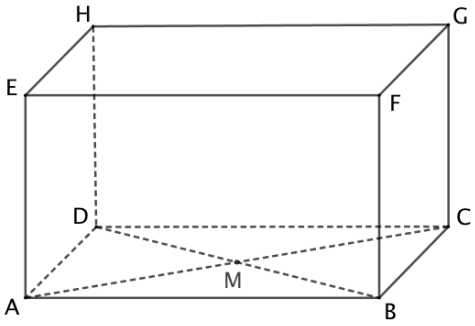
$\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$

$\vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$



Méthode : Exprimer un vecteur comme combinaisons linéaires de vecteurs

Dans le parallélépipède ci-contre, M est le centre du rectangle $ABCD$.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.



Exercices d'application : capacité 1 et 2 p. 51 et exercices

II. Droites et plans de l'espace

A. Vecteurs colinéaires

Définition : Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu'ils ont même direction c'est à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

B. Vecteur directeur d'une droite

Définition : On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur non nul qui possède la même direction que la droite d.

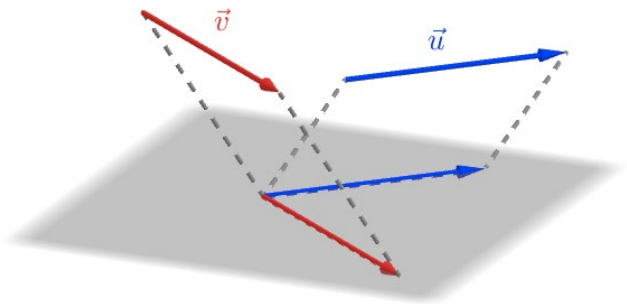
Propriété : Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. La **droite** d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Propriété : Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercices d'applications : capacité 3 p. 52 et exercices

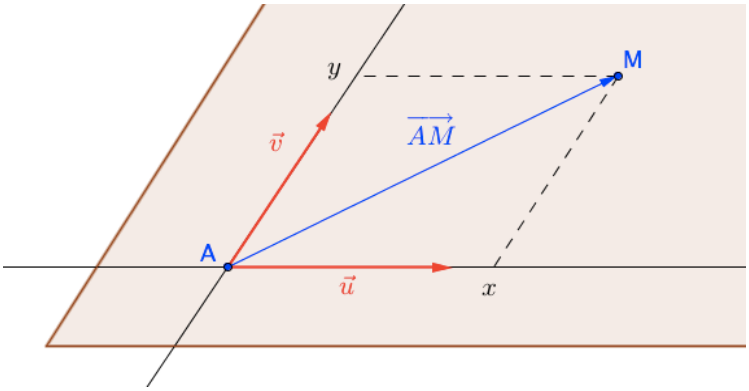
C. Direction d'un plan de l'espace

Propriétés : Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d'un plan.



D. Caractérisation d'un plan de l'espace

Propriété : Soit un point A et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Remarque : Dans ces conditions, le triplet $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère du plan.

Démonstration :

Remarque :
Un plan est donc totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Propriété : Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Démonstration :

Conséquence : Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que deux vecteurs non colinéaires de l'un des plans sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre.

Exercices d'application

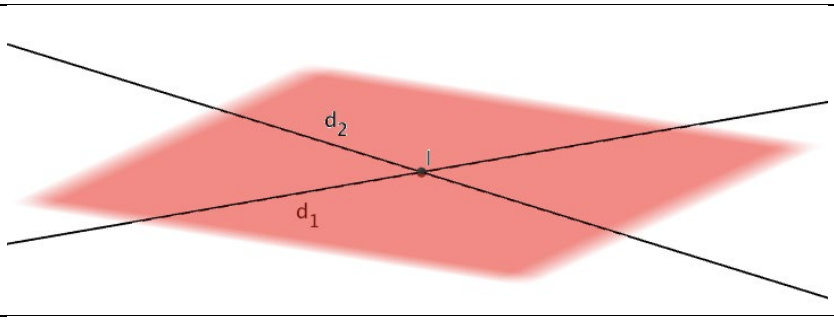
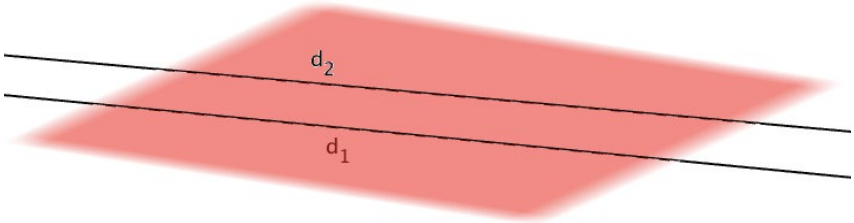
III. Positions relatives de droites et de plans de l'espace

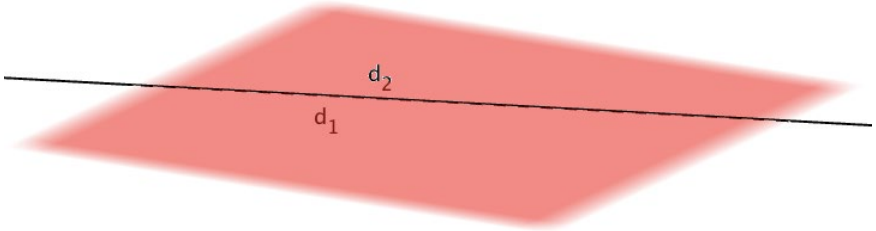
Activité 3 p. 49 : études de droites et plans parallèles dans l'espace

A. Positions relatives de deux droites

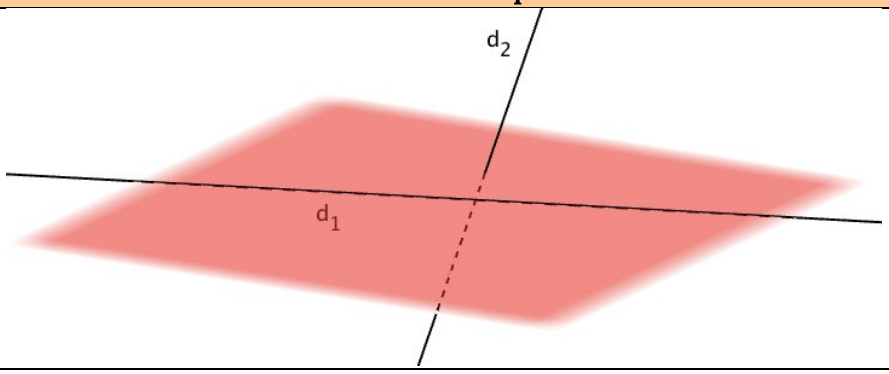
Propriété : Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.

d_1 et d_2 sont coplanaires

<table>
<tr><td>d_1 et d_2 sont sécantes</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">d_1 et d_2 sont parallèles</td><td>

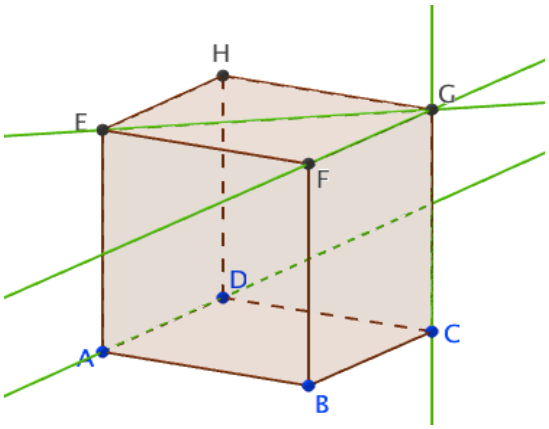
d_1 et d_2 sont strictement parallèles</td></tr>
<tr><td>

d_1 et d_2 sont confondus</td></tr>
</table>

d_1 et d_2 sont non coplanaires


Exemple :

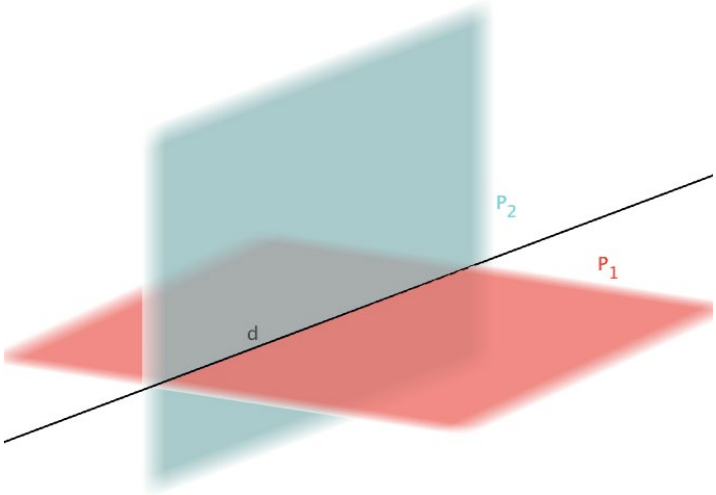
ABCDEFGH est un cube.
- Les droites (EG) et (FG) appartiennent au même plan (EFG) et sont sécantes en G.
- Les droites (AD) et (FG) appartiennent au même plan (ADG) et sont parallèles.
- Les droites (AD) et (CG) sont non coplanaires.



B. Positions relatives de deux plans

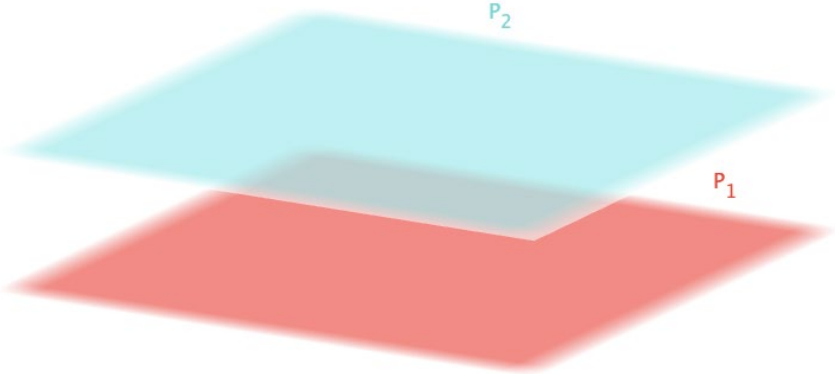
Propriété : Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

P_1 et P_2 sont sécants



P_1 et P_2 sont sécants suivant la droite d

P_1 et P_2 sont parallèles



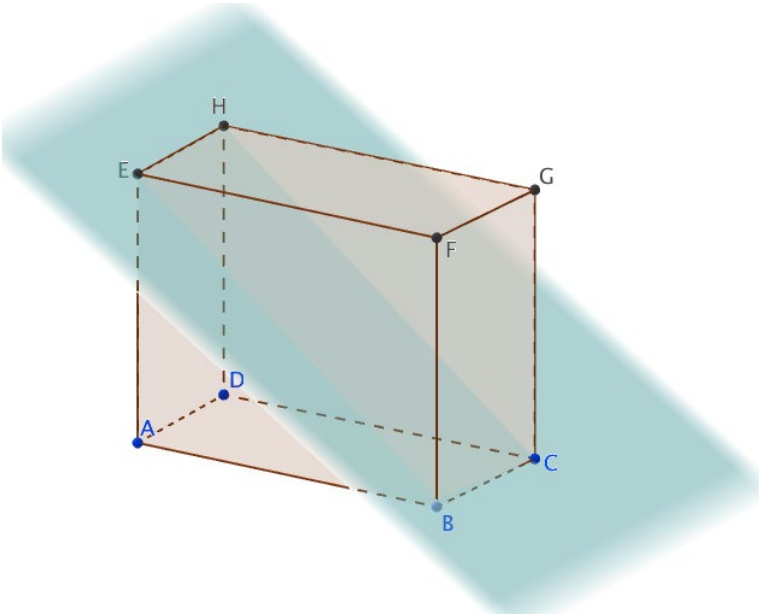
P_1 et P_2 sont strictement parallèles



P_1 et P_2 sont confondus

Exemple :

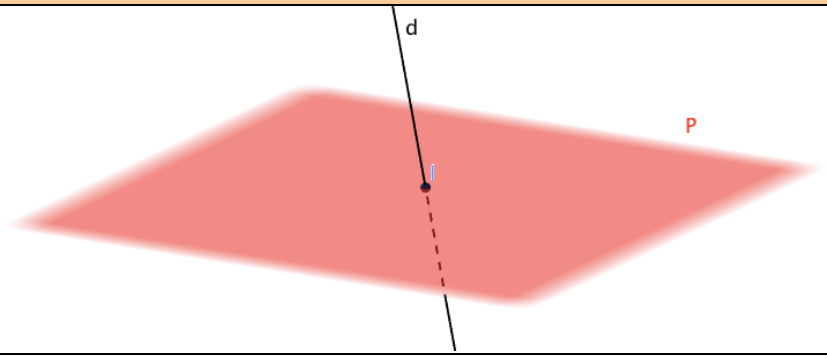
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.
- Les plans (BCG) et (BCE) sont sécants suivant la droite (BC).
- Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles



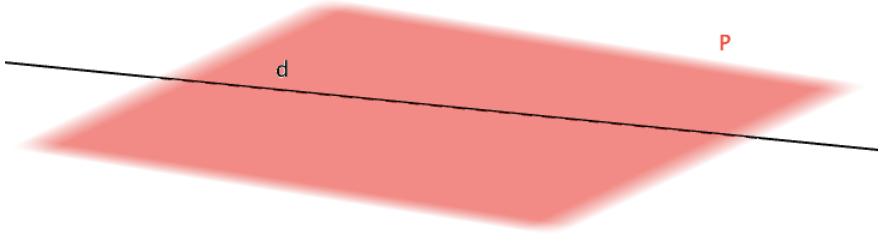
C. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété : Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

d et P sont sécants

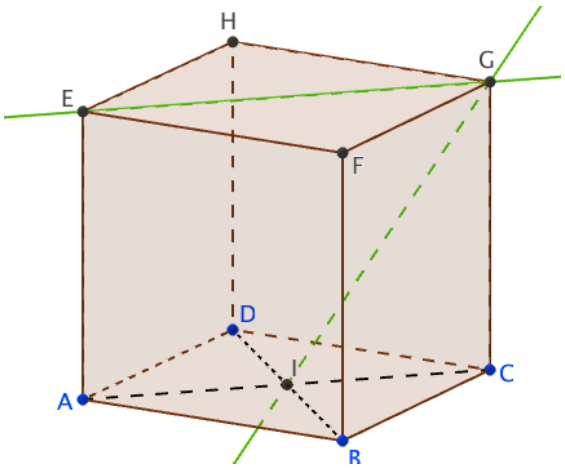


d et P sont sécants en un point I

d et P sont parallèles
 d est incluse dans P
 d et P sont strictement parallèles

Exemple :

ABCDEFGH est un cube.
- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I.
- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.

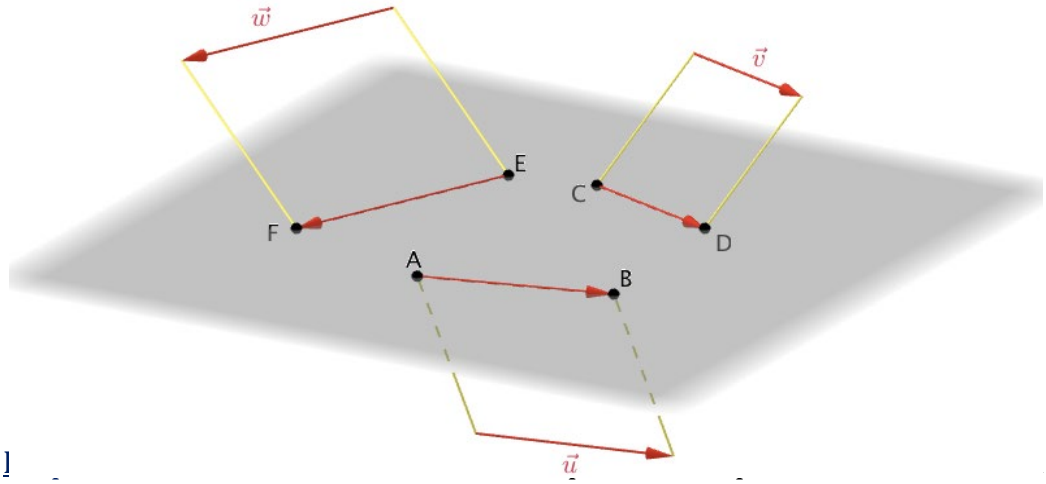


IV. Bases et repères de l'espace

A. Vecteurs coplanaires et bases de l'espace

Activité 2 p. 48 : introduction de la notion de vecteur coplanaire

Définition : Trois vecteurs sont **coplanaires** s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.



] couple de réels $(x\,;y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$.

Exercices d'application : Démontrer que 4 points sont coplanaires

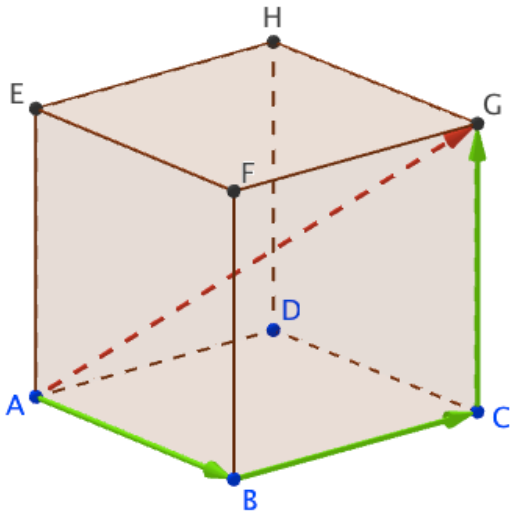
Propriété : Soit $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

Démonstration :

Définition : Soit $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
On appelle **base de l'espace** le triplet $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.

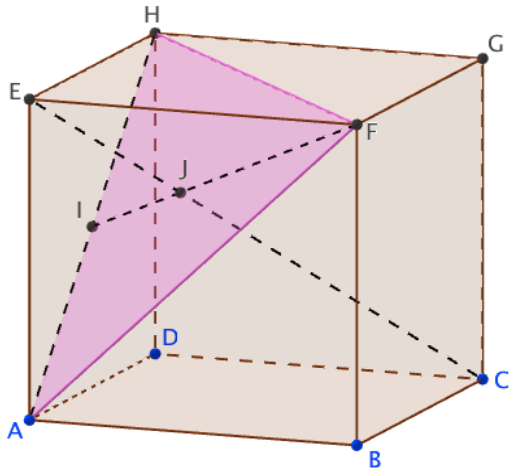
Méthode : Reconnaitre une base de l'espace

ABCDEFGH est un cube.
1) Reconnaître une base de l'espace.
2) Décomposer le vecteurs $\overrightarrow{AG}$ dans cette base.



Méthode : Démontrer l'alignement par décomposition de vecteurs dans une base

$ABCDEFGH$ est un cube.
Soit I le milieu de $[AH]$ et J le point de $[FI]$ tel que :
$\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{FI}$
Démontrer que les points E, J et C sont alignés.



B. Repère de l'espace

Définition : Soit $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires. O est un point de l'espace.
On appelle **repère de l'espace** le quadruplet $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.

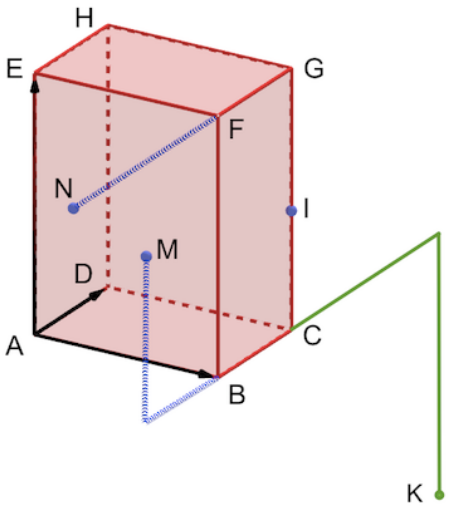
Remarques : - O est appelé l'origine du repère.

- La décomposition $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du point M.

- De même, la décomposition $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du vecteur $\vec{u}$.

Méthode : Lire des coordonnées dans l'espace

Soit un parallélépipède $ABCDEFGH$.
I est le milieu de $[CG]$.
M et N sont définis par : $\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI}$
1) Dans le repère $\left(A\ ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, donner les coordonnées de tous les points de la figure.
2) Placer le point $K(1\ ;3\ ;\ -1)$.



Exercices d'applications