Séquence 3

Combinatoire et dénombrement

I. Principe additif et multiplicatif

Activité 1 p. 274 (Barbazo) : découvrir les notions de principe additif et multiplicatif

A. Ensemble fini et cardinal

On dira qu'un ensemble E est **fini** lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
Le nombre d'éléments de E est appelé le **cardinal** de l'ensemble et il est noté :
$Card(E)$ ou $|E|$.
Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ est un ensemble fini de cardinal 0.

Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est à dire en déterminer le cardinal.

Exemple :
On considère l'ensemble E des élèves de votre classe.
Alors $card(E) =$

B. Principe additif

Définition : On dit que deux ensembles sont **disjoints** s'ils ont aucun élément en commun.

Propriété : Soit $E_1, E_2, \dots, E_n, n$ ensembles finis deux à deux disjoints.
Alors $Card(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = Card(E_1) + Card(E_2) + \cdots + Card(E_n)$

Exemple :
Soit $E_1 = \{a\ ;b\ ;c\ ;d\}$ et $E_2 = \{\alpha\ ;\beta\ ;\gamma\}$
Alors $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ (E_1 et E_2 sont disjoints) et on a :

$$Card(E_1 \cup E_2) = Card(E_1) + Card(E_2) = 4 + 3 = 7$$

Application :
Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre.
On sait que, 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune.
Calculer le nombre d'élèves de cette classe.

C. Principe multiplicatif

Définitions : Soit p ensembles finis $E_1, E_2, \dots, E_p$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des **couples** (a_1, a_2) où $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble des **triplets** (a_1, a_2, a_3) où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ et $a_3 \in E_3$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est l'ensemble des **p-uplets** $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ … $a_p \in E_p$.

Remarque : Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble sur lui-même, on note $E \times E = E^2$ et dans le cas général, E^p est le produit de p ensembles E.

Exemple : On lance deux dés à six faces. On note $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ l'ensemble des résultats possibles pour un dé.
Alors E^2 est l'ensemble des couples possibles pour deux dés.
Dénombrer le nombre de couples appartenant à E^2 et en citer des exemples.

Propriété : Soit un ensemble fini E à n éléments. Alors on a :

$$\boldsymbol{Card(E^p) = n^p}$$

Applications : capacité 2 p. 15 et exercices

Méthode : Dénombrer le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments
Le refrain de la chanson « Digicode » de l'artiste *Oldelaf* comporte une erreur à corriger.

« Il y avait pour entrer juste un digicode
Deux lettres et dix chiffres incommodes
Un détail que t'avais surement oublié
4 milliards de possibilités »

Soit A l'ensemble des lettres de l'alphabet et N l'ensemble des chiffres.
On a alors : $Card(A) = 26$ et $Card(N) = 10$.

Pour le choix des 2 lettres, on compte $Card(A^2) = 26^2 = 676$ possibilités.
Pour le choix des 10 chiffres, on compte $Card(N^{10}) = 10^{10}$ possibilités.
Nombre de possibilités du digicode :
$Card(A^2 \times N^{10}) = Card(A^2) \times Card(N^{10}) = 676 \times 10^{10} = 6\,760\,000\,000\,000$
Soit environ 7 000 milliards de possibilités et non pas 4 milliards comme dans la chanson.

II. Arrangements et permutations

Activité 3 p. 11 : dénombrement de k-uplets d'éléments distincts

A. La factorielle d'un nombre

Définition : On appelle **factorielle** n le produit de tous les nombres entiers de 1 à n. Et on note : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

Remarque : $n!$ se lit « factorielle n ».
Convention : $0! = 1$

Exemples :
$5! =$
$100! =$
$1! =$

B. Arrangements

Exemple :
On considère l'ensemble $E = \{a\ ;\ b\ ;\ o\ ;\ p\ ;\ r\}$.

- **Les triplets** (b, o, a) et (r, a, p) sont des arrangements à 3 éléments de E.
Et (p, a, r) est un arrangement à 3 éléments de E différent de (r, a, p). L'ordre des éléments est à prendre en compte.

- Le **quintuplet** (p, r, o, b, a) est un arrangement à 5 éléments de E.

- Le **sextuplet** (b, a, r, b, a, r) n'est pas un arrangement de E car des éléments se répètent.

Définition : Soit E un ensemble à n éléments. Et $p \leq n$.
Un **arrangement** de p éléments de E est un p-uplet d'éléments distincts de E.

Propriété : Dans un arrangement l'ordre des éléments compte et les éléments ne se répètent pas.

Exemple : On prolonge l'exemple précédent pour calculer le nombre d'arrangements à 3 éléments de E.
- Il existe 5 choix pour la 1ère lettre.
- La 1ère lettre étant fixée, il existe 4 choix pour la 2e lettre. Car il n'y a pas répétition d'éléments.
- Les deux premières lettres étant fixées, il existe 3 choix pour la 3e lettre.
En appliquant le principe multiplicatif, le nombre d'arrangements à 3 éléments de E est égal à : $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Application : capacité 4 p. 17 et exercices

B. Permutations

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\}$.
Les quintuplets $(1, 3, 2, 5, 4)$ et $(5, 1, 2, 3, 4)$ sont des permutations de E car ce sont des p-uplets qui utilisent tous les éléments de E.

Définition : Soit E un ensemble à n éléments.
Une **permutation** de E est un arrangement à n éléments de E.

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Exemple :
Il existe $3! = 6$ façons différentes que 3 personnes s'assoient sur un banc à 3 places

Application : capacité 5 p. 17 et exercices

III. Combinaisons

Activité 3 p. 11 : découvrir les combinaisons

A. Nombre de combinaisons

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\}$.
Le sous-ensemble $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ est appelée une combinaison de E à 3 éléments.
Le sous-ensemble $\{2\ ;\ 5\}$ est appelée une combinaison de E à 2 éléments.
Pour une combinaison, l'ordre n'a pas d'importance. Ainsi $\{1\ ;\ 2\}$ et $\{2\ ;\ 1\}$ correspondent à la même combinaison de E.

Définition : Soit E un ensemble à n éléments. Et $p \leq n$.
Une **combinaison** de p éléments de E est un sous-ensemble de E.

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de combinaisons de p éléments de E est égal à :

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Ce nombre se note : $\binom{n}{p}$.

Cas particuliers : Pour tout entier naturel n : $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{1} = n$

Application :

Une classe composée de 18 filles et 16 garçons va élire les 4 délégués. Dans cet exercice, on ne distingue pas les délégués et les délégués-adjoints.
a) Combien existe-t-il de possibilités pour cette élection ?
b) Emma dit qu'elle ne souhaite pas être élue si Bastien est élu. Dans ces conditions, combien existe-t-il de possibilités ?

B. Coefficients binomiaux

Le nombre $\binom{n}{p}$ de combinaisons de p parmi n porte également le nom de **coefficient binomial** en référence à une loi de probabilité : la loi binomiale qui est définie à l'aide des coefficients $\binom{n}{p}$. Celle-ci sera étudiée dans un chapitre ultérieur.

Propriété de symétrie : Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$: $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

Propriété du triangle de Pascal : Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Démonstration au programme :

Exercices d'application : capacité 6 et 7 p.19 et exercices

C. Triangle de Pascal

Le tableau qui suit se complète de proche en proche comme combinaisons répondant à la propriété du triangle de Pascal.

Le triangle de Pascal peut être utilisé par exemple pour déterminer rapidement les coefficients binomiaux.

↓ Exemple pour $\binom{4}{2}$

n \ p	0	1	**2**	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	$\binom{4}{2}=6$	4	1		

5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

↑ Exemple pour $\binom{5}{3}+\binom{5}{4}=\binom{6}{4}$.

Exercices d'application : capacité 8 p. 21 et exercices

D. Parties d'un ensemble

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de sous-ensemble de E est égal à :

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

Démonstration au programme :

Exemple :

Soit : $E = \{1, 2, 3\}$.

Alors toutes les parties de E sont :

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$.

Elles sont au nombre de 8 et en effet : $2^3 = 8$.

Exercices d'application :