Séquence 1 :

Suites – Partie 1

I. Raisonnement par récurrence

A. Propriété mathématique

Définition : Une propriété mathématique est une phrase, écrite ou non avec des symboles mathématiques, qui contient un verbe et qui est soit vraie, soit fausse.

Cette propriété peut être une égalité, une inégalité ou une phrase.

Exemple :

- $P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $P(n) : (1 + \pi) \times n \geqslant 1 + n\pi$
- $P(n) : n \times 3 - n$ *est un multiple de* 3

B. Principe de récurrence

P(n) désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.

Si l'on démontre les deux étapes suivantes :

- Initialisation : la propriété $P(n)$ est vraie pour un entier n_0;
- Hérédité : pour tout entier $k \geqslant n_0$, « P(k) est vraie » implique « P(k+1) est vraie »

Alors on peut conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

C. Exemple

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

On va démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \geq u_n$

- **Initialisation :** $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 2 + 2 = \frac{8}{3} > 2$

donc $u_1 \geq u_0$

- **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence :
Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $u_{k+1} \geq u_k$.
- Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1$: $u_{k+2} \geq u_{k+1}$.

On a $u_{k+1} \geq u_k$ donc : $\frac{1}{3}u_{k+1} \geq \frac{1}{3}u_k$ et donc $\frac{1}{3}u_{k+1} + 2 \geq \frac{1}{3}u_k + 2$ soit $u_{k+2} \geq u_{k+1}$.

Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $u_{n+1} \geq u_n$ et donc la suite (u_n) est croissante.

Exercices d'applications : Annexe 1, capacité 1 p. 13 et exercices

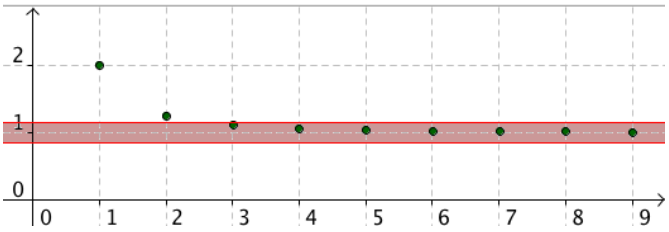
II. Limite finie ou infinie d'une suite

Activité 1 et 2 p. 126 : observation du comportement de certaines suites

A. Limite finie et suite convergente

1) Exemple :

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ a pour limite 1.
En effet, les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang.
Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.



2) Définition :

On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.
Une telle suite est dite **convergente**

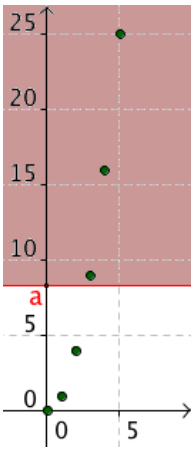
3) Limites de suites usuelles

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

B. Limite infinie

1) Exemple :

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.
En effet, les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite à partir d'un certain rang.



Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a\ ;\ +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

2) Définition

- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]a\ ;\ +\infty[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty\ ;\ b[$, b réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3) Limites de suites usuelles

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty,\ \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty,\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

4) Vocabulaire et Remarque

- Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.
- Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie. Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs –1 et 1. Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

5) Algorithme de détermination d'un seuil

Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$.
Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$.

Voici un algorithme écrit en langage naturel :

Langage naturel

Définir fonction seuil(A)
 	
n ← 0
u ← 2
 	
Tant que u < A
  n ← n + 1
  u ← 4u
Fin Tant que
 	
Afficher n

En appliquant cet algorithme avec A = 100, on obtient en sortie $n = 3$.
A partir du terme u_3, les termes de la suite dépassent 100.

En langage calculatrice et Python, cela donne :

Python

```
def seuil(a):
    n=0
    u=2
    while u<a:
        n=n+1
        u=4*u
    return(n)
```

Exercices d'applications :

III. Limites et opérations

A. Somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

Exemple :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 + n = ?$$

B. Produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	$L\,L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)(n^2+3)=?$$

C. Quotient

$\lim_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{-n^2-3}=?$$

Remarque :

Il est important cependant de reconnaître les formes indéterminées pour lesquelles il faudra utiliser des calculs algébriques afin de lever l'indétermination ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites.

Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty-\infty",\ "0\times\infty",\ "\frac{\infty}{\infty}"\text{ et }"\frac{0}{0}".$$

Calcul de limites avec formes indéterminées

a) $\lim_{n\to+\infty} n^2-5n+1$ b) $\lim_{n\to+\infty} n-3\sqrt{n}$ c) $\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$

d) $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+n}{n+3}$ e) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

Exercices d'applications :

Méthode 1 Vérifier qu'une propriété est vraie à un rang donné

Soit n un entier naturel. Vérifier que chaque propriété $P(n)$ suivante est vraie pour le rang n_0 donné.

1. $P(n)$: $5^n - 2^n$ est un multiple de 3 ; $n_0 = 1$.
2. $P(n)$: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \geqslant n^3$; $n_0 = 2$.
3. $P(n)$: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$; $n_0 = 3$.

Solution commentée

1. On remplace n par n_0 et on obtient $5^1 - 2^1 = 3$, qui est bien un multiple de 3.
Donc $P(n)$ est vraie pour $n_0 = 1$. Ainsi, $P(1)$ est vraie.

2. On remplace n par n_0 et on obtient $1^2 + 2^2 = 5$.
Par ailleurs, $2^3 = 8$ et $5 \leqslant 8$. Donc $P(2)$ est vraie.

3. On remplace n par n_0 et on obtient $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$.
Par ailleurs, $(1 + 2 + 3)^2 = 6^2 = 36$. Donc $P(3)$ est vraie.

EXERCICE 6 p. 26

Méthode 2 Étudier l'initialisation d'une propriété

Soit n un entier naturel. On considère la propriété $P(n) : 3^n \geqslant (n + 2)^2$.

• Déterminer le plus petit entier naturel n_0 pour lequel $P(n)$ est vraie.

Solution commentée

On teste $P(n)$ pour les premières valeurs entières de n :
$3^0 = 1$ et $(0 + 2)^2 = 2^2 = 4$, donc $P(0)$ n'est pas vraie ;
$3^1 = 3$ et $(1 + 2)^2 = 3^2 = 9$, donc $P(1)$ n'est pas vraie ;
$3^2 = 9$ et $(2 + 2)^2 = 4^2 = 16$, donc $P(2)$ n'est pas vraie ;
$3^3 = 27$ et $(3 + 2)^2 = 5^2 = 25$, donc $P(3)$ est vraie.
Le plus petit entier naturel n_0 pour lequel $P(n)$ est vraie est $n_0 = 3$.

EXERCICE 8 p. 27

Méthode 3 Mettre en œuvre un raisonnement par récurrence

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}3u_n + 7$.

• Démontrer par récurrence que $u_n \leqslant 10$ pour tout entier naturel n.

Solution commentée

On considère la propriété $P(n) : u_n \leqslant 10$.
• **Initialisation.** Pour $n_0 = 0$, $u_0 = 2$. Or $2 \leqslant 10$, donc $P(0)$ est vraie.
• **Hérédité.** On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie (hypothèse de récurrence), c'est-à-dire : $u_k \leqslant 10$. On veut démontrer que $P(k + 1)$ est alors vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \leqslant 10$.
Par hypothèse de récurrence, on a $u_k \leqslant 10$, donc $0{,}3u_k \leqslant 3$ en multipliant chaque membre par le réel positif 0,3.
En ajoutant 7 à chaque membre, on trouve alors : $0{,}3u_k + 7 \leqslant 10$, soit $u_{k+1} \leqslant 10$.
Donc $P(k + 1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.
• **Conclusion.** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_n \leqslant 10$ pour tout entier naturel n.

EXERCICE 12 p. 27