Séquence 4

Dérivation – Partie 2

I. Fonctions usuelles et nombre dérivé

A. Fonction dérivée d'une fonction donnée

Définition 4 : Si f est une fonction dérivable en tout point a d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I. La fonction qui à chaque réel x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x est appelée **fonction dérivée de f** en x.

Exemple : Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction $g(x) = x$

B. Nombre dérivé des fonctions usuelles :

Activité 3 : découverte de la dérivée de la fonction $\frac{1}{x}$ et de sa démonstration.

Fonction	$f(x) =$	Dérivable sur…	$f'(x) =$
constante	p	R	0
identité	x	R	1
carré	x^2	R	$2x$
Racine carré	$\sqrt{(x)}$	$[0; \infty [$	$\frac{1}{2\sqrt{(x)}}$
cube	x^3	R	$3x^2$
inverse	$\frac{1}{x}$	R/{0}	$-\frac{1}{x^2}$

Démonstration :

Capacité 4 et 5 p 111

Exercices d'applications : 39, 40, 43, 45 p121

II. Fonctions dérivés et opérations :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Soit a un réel de I et h un réel non nul tel que $a + h$ appartient à I.

1) Dérivée de la somme de fonctions :

La somme $u + v$ est dérivable est $\boldsymbol{(u + v)' = u' + v'}$.

Exemple : Donner la dérivée de la fonction $f(x) = x^2 + x + \sqrt{(x)}$

2) Dérivée du produit de fonctions :

Le produit uv est dérivable et $\boldsymbol{(u \times v)' = u' \times v + u \times v'}$

Démonstration :

Exemple : déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = x \times \sqrt{(x)}$

3) Dérivée du produit d'une fonction par une constante :

Le produit ku, avec k constante réelle, est dérivable et $\boldsymbol{(ku)' = ku'}$

Exemple : déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = 2x^3$

Capacité 6 p. 113

Exercices d'applications : 49, 50, 51 p121

4) Dérivée du carré d'une fonction :

Le carré de u , noté u^2 , est dérivable sur I et $(u^2)' = 2 \times u \times u'$

Exemple : déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = (x - 3)^2$

5) Dérivée du quotient d'une fonction :

Si $v(x) \neq 0$ sur I, alors l'inverse de v est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Si $v(x) \neq 0$ pour tout réel x de I, alors le quotient $\frac{u}{v}$ est dérivable et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple : Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{3}{x^2+5}$ et $g(x) = \frac{2x^2-13}{1+x}$

Démonstration (pas au programme) :

Capacité 8 p. 109

Exercices d'application : 69,71,73 p 122.

6. Dérivée de la fonction puissance x^n

Propriété : Soit n un entier relatif non nul. La fonction x^n est dérivable :

- Sur R si $n > 0$
- Sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ si $n < 0$

$$f'(x) = nx^{(n-1)}$$

Exemple : Dériver les fonction x^5 et $\frac{1}{x^4}$

Exercices 79 et 81 p. 123

6) Dérivée de la composée d'une fonction affine :

Propriété : On considère un intervalle I et a et b deux réels. Soit J l'intervalle formé des valeurs prises par $ax + b$ lorsque x décrit l'intervalle I.

Si la fonction g est dérivable sur J, alors la fonction f définie sur I par $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I, on a :

$$\boldsymbol{f'(x) = a \times g'(ax + b)}$$

Capacité 9 p. 115

Exercices d'application : 77 et 78 p. 123

7) Fonction valeur absolue

Définition : la fonction valeur absolue est définie sur R par $f(x) = |x|$ et vaut :

- Si $x < 0$, $f(x) = -x$
- Si $x > 0$, $f(x) = x$

Exemple : $|2| = 2$ et $|-3| = 3$

Propriété : Soit f la fonction valeur absolue.

Pour tout $x \neq 0$, f est dérivable. **Si $x < 0$, alors $f'(x) = -1$, si $x > 0$, alors $f'(x) = 1$.**

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Capacité 11 p 115

Exercices d'application : 73 p. 123

Expérimentation 15 p. 117

DM : Sujets A, B et C p. 133

Tableau récapitulatif des dérivées

Fonctions ou opérations	Dérivée	Domaine de validité
x	1	$\mathbb{R}$
$k*x$	k	$\mathbb{R}$
$k*u$	$k*u'$	D_u
$u+v$	$u'+v'$	$D_u \cap D_v$
$u*v$	$u'v+uv'$	$D_u \cap D_v$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$D_u \cap D_v \cap v \neq 0$
$\frac{k}{u}$	$\frac{-ku'}{u^2}$	$D_u \cap u \neq 0$
u^n	$mu'*u^{n-1}$	$D_u^{\,n}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (1)	$D_{\sqrt{u}}$
$\cos u$	$-u'\sin u$	D_u
$\sin u$	$u'\cos u$	D_u
e^u	$u'e^u$	D_u
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$D_{\ln u}$