Séquence 15

Variables aléatoires réels

Contenu :

- Evénement lié à une variable aléatoire.
- Loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Espérance, variance et écart type.

I. Variables aléatoires réelles

Activité 1 et 2 p. 306 : introduction de la notion de variables aléatoires et de loi de probabilités

A. Notion de variable aléatoire réelle

Définition :

- Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire (Ω est l'univers). Une **variable aléatoire** sur Ω est une fonction définie sur Ω à valeurs dans R, qui à tout élément de Ω fait correspondre un nombre réel.

Soient X une variable aléatoire définie sur Ω et x un réel.

- L'événement « **X prend la valeur x**» est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel x.
- L'événement « **X prend des valeurs supérieurs ou égales à x** » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel supérieur ou égal à x.
- L'événement « **X prend des valeurs inférieures ou égales à x** » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel inférieur ou égal à x.

Exemples : (p. 308) et capacités 1 et 2 p. 309

B. loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition : Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. Définir la loi de probabilité de X c'est associer à chacune des valeurs prises par X sa probabilité.

On présente souvent ces données sous la forme d'un tableau :

Valeurs x_i prises par X	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(X = x_1)$	p_1	p_2	p_3	p_4

Propriété : Dans le tableau qui donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire, **la somme des probabilités est égale à 1.**

Notation :

Exemple : capacité 3 p. 309

Exercices d'applications :

II. Espérance, variance et écart-type

A. espérance d'une variable aléatoire

Définition : L'espérance d'une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$ est le nombre réel noté E(X) est donné par

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

Interprétation de l'espérance : Elle s'interprète comme la valeur moyenne prise par la variable aléatoire X lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience.

Exemple : Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X donnée dans l'exemple précédent et interpréter votre résultat.

B. Variance et écart-type

Définition :

- La **variance** d'une variable aléatoire X est le réel positif noté V(X) défini par :

$$V(X) = [x_1 - E(X)]^2 \times p_1 + [x_2 - E(X)]^2 \times p_2 + \cdots + [x_n - E(X)]^2 \times p_n$$

- **L'écart-type** d'une variable aléatoire X, noté $\sigma(X)$, est le réel égal à la racine carré de la variance.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Interprétation de la variance : Elle mesure la dispersion des valeurs prises par la variable aléatoire X autour de son espérance E(X).

Utilisation de la calculatrice Numworks :

Exemples : capacité 4 et 5 p. 311

Exercices d'application :

III. Algorithmique et python

Travail sur les pages 311 à 315 du manuel.