Séquence 12

Applications du produit scalaire

I. Application du produit scalaire

A. Calcul de $\| \vec{u} + \vec{v} \|^2$

Théorème 5 : $\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + \| \vec{v} \|^2$.

Démonstration :

Capacité 8 p. 227

B. Formule d'Al-Kachi :

On considère un triangle ABC et on pose $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Alors $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$.

Démonstration : D'après la relation de Chasles, on peut écrire $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, donc $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2$

On sait que $\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2$

Or $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = c^2$ et $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = b^2$

D'autre part, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(-\overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ = -AB.AC.cos $\widehat{BAC}$, d'où le résultat.

Remarque : Si le triangle ABC est rectangle alors $\cos \widehat{A} = 0$ et la formule d'Al Kashi nous permet de retrouver le **théorème de Pythagore.**

Capacité 7 p. 227

C. Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

Propriété : Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Démonstration :

© Benaroch V1 09/2019

Soit Ω le centre du cercle de diamètre [AB]. Pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}).(\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega B}) = (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}).(\overrightarrow{M\Omega} - \overrightarrow{\Omega A}) = \overrightarrow{M\Omega}^2 - \overrightarrow{\Omega A}^2 = M\Omega^2 - \Omega A^2$

Comme Ω est le milieu de [AB], $\overrightarrow{\Omega B} = -\overrightarrow{\Omega A}$

On obtient donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si ΩM = ΩA.

Ainsi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si M appartient au cercle e centre Ω et de rayon ΩA, c'est-à-dire au cercle de diamètre [AB]

Propriété : Un point M distinct de A et B appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.

Démonstration :

Capacité 9 p.227

D. Application à la physique :

Travail sur activité 2 p 244.