Sequence1 :

Second degré (partie 1)

I. Fonction polynôme de degré 2

A / Définition

On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficients *a*, *b* et *c* sont des réels donnés avec a ≠ 0

Remarque :

Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

Exemples et contre-exemples :

1) Les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes de degré 2 :

$f(x) = 3x^2 - 7x + 3$

$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{5}{3}$

$h(x) = 4 - 2x^2$

$k(x) = (x-4)(5-2x)$

2) $m(x) = 5x - 3$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

3) $n(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$ est une fonction polynôme de degré 4.

© Benaroch V1 09/2019

B / Résolution d'une équation de second degré

Définition : Une **équation du second degré** est une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme ax^2+bx+c.

Exemple :
L'équation $3x^2-6x-2=0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle **discriminant** du trinôme ax^2+bx+c, le nombre réel, noté Δ, égal à b^2-4ac.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c.
- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une unique solution : $\boldsymbol{x' = \frac{-b}{2a}}$.

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes :

$$\mathbf{X' = \frac{-b-\sqrt{(\Delta)}}{2a}} \qquad \textbf{et} \qquad \mathbf{X'' = \frac{-b+\sqrt{(\Delta)}}{2a}}$$

Exemple d'applications :

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2-x-6=0$ b) $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$ c) $x^2+3x+10=0$

Exercices d'application :

© Benaroch V1 09/2019

C/ Factorisation d'un trinôme

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par f

$(x) = ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x, on a $f(x) = a(x - x')^2$

- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x')(x - x'')$

Remarque : Si $\Delta < 0$, on n'a pas de forme factorisée de f.

Exemples d'application :

Factoriser les trinômes suivants :

$4x^2 + 19x - 5$

$9x^2 - 6x + 1$

Exercices d'application :

© Benaroch V1 09/2019

Exercice d'approfondissement pour aller plus loin :

Résoudre l'équation (E) :

$$\frac{x-2}{2x^2-3x-2}-\frac{x^2}{2x^2+13x+6}=0$$

© Benaroch V1 09/2019

D/ Signe d'un trinôme

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	

- Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x'	x"	∞
$f(x)$	Signe a	0	Signe - a 0	Signe a

- Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	∞
$f(x)$	Signe a	0	Signe a

Exemple d'application :

Résoudre l'inéquation :

$x^2 + 3x - 5 < -x + 2$

© Benaroch V1 09/2019

Exercices d'applications :

II. Forme canonique d'un trinôme

Propriété : Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où α et β sont deux nombres réels.

Cette dernière écriture s'appelle la **forme canonique** de f.

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$

On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique :

f(x)=☺(x- ☺)² + ☺

où ☺, ☺ et ☺ sont des nombres réels.

$f(x) = 2x^2 - 20x + 10$

$= 2\left[x^2 - 10x\right] + 10$

$= 2\left[x^2 - 10x + 25 - 25\right] + 10$

$= 2\left[(x-5)^2 - 25\right] + 10$

car $x^2 - 10x$ est le début du développement de $(x-5)^2$

et $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

© Benaroch V1 09/2019

$= 2(x-5)^2 - 50 + 10$

$= 2(x-5)^2 - 40$

$f(x) = 2(x-5)^2 - 40$ $\rightarrow$ *forme canonique de* f

Démonstration :

Comme $a \neq 0$, on peut écrire pour tout réel x:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$

$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$

$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c$

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$= a(x-\alpha)^2 + \beta$

$\alpha = -\frac{b}{2a}$

$\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Remarque : Pour écrire un trinôme sous sa forme canonique, il est possible d'utiliser les deux dernières formules donnant α et β… à condition de les connaître !

Exercices d'application :

© Benaroch V1 09/2019

III. Variations et représentation graphique d'un trinôme

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $a(x-\alpha)^2+\beta$, avec a$\neq$ 0

- Si $a>0$, f admet un minimum pour $x=\alpha$. Ce minimum est égal à β.

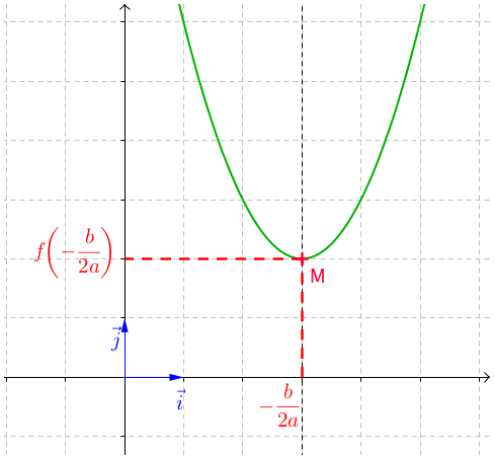
- Si $a<0$, f admet un maximum pour $x=\alpha$. Ce maximum est égal à β.

Remarque :

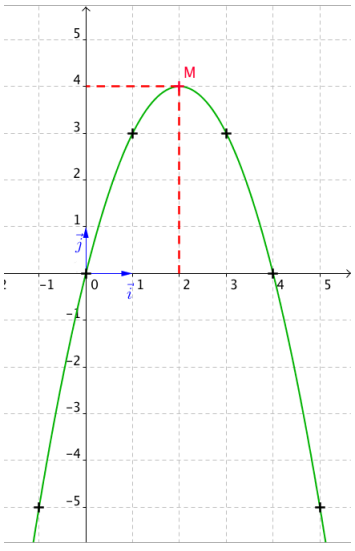
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$, avec a $\neq$0

On peut retenir que f admet un maximum (ou un minimum) pour $\boldsymbol{x'=\frac{-b}{2a}}$

- Si $a>0$, on obtient une parabole avec les bras tournés vers le haut.



- Si $a<0$, on obtient une parabole avec « les bras » tournés vers le bas.



© Benaroch V1 09/2019

Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est **une parabole.**

Le point M de coordonnées $(\frac{-b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right))$ est le **sommet** de la parabole. Il correspond au maximum (ou au minimum) de la fonction *f*.

La parabole possède un **axe de symétrie**. Il s'agit de la droite d'équation :

$x = -\frac{b}{2a}$.

Exemple d'application :

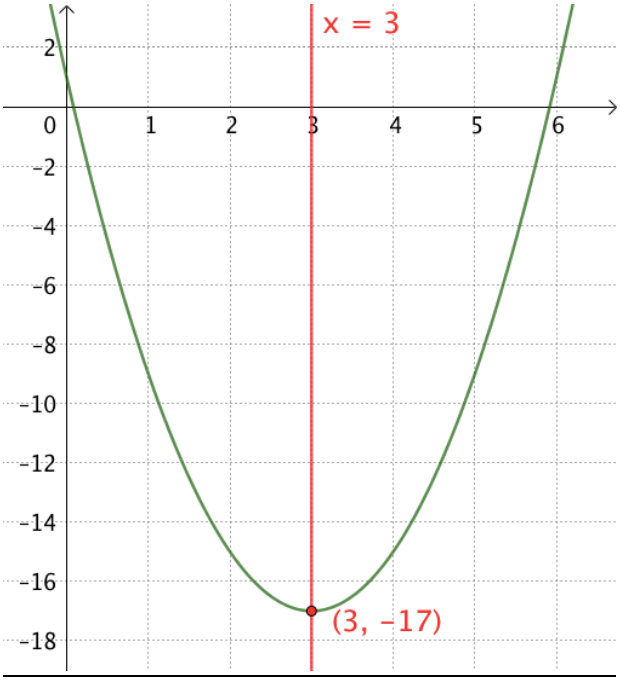
Dresser le tableau de variation et représenter graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$

© Benaroch V1 09/2019

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'une parabole

Déterminer l'axe de symétrie et le sommet de la parabole d'équation

$f(x) = 2x^2 - 12x + 1$



- Différents cas de figure de position de la parabole P par rapport à l'axe des abscisses
  Cf. livre p46

© Benaroch V1 09/2019